Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

1º Esonero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica Soluzioni
04–02–06

Esercizio 1.

A. $z_\pm = \frac{1}{2}(2+i\pm\sqrt{-5-12i})$ applicando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. Inoltre bisogna osservare che $-5-12i=(3i-2)^2$ da cui le soluzioni della equazione sono $2i$, e $2-i$. Che $-5-12i=(3i-2)^2$ si poteva vedere direttamente oppure imporre che $\sqrt{-5-12i}=a+ib$. Dopo si eleva al quadrato e si risolve il sistema conseguente. Le soluzioni sono $2i$ e $2-i$. Le risposte sono 2 e $1+\frac{3}{2}i$

B. Abbiamo $-5-12i=(3i-2)^2$. Le radici dell'equazione sono $-2i$, e $i-2$, e la soluzione è data da -2, $-1-\frac{3}{2}i$

C. In questo caso si ha $\sqrt{-9}$ e quindi $\pm 3i$. Le radici dell'equazione sono $2-2i$, e $2+i$, e la soluzione è data da 3, $3-\frac{3}{2}i$

D. In questo caso si ha $\sqrt{-27-36i}=\pm(6i-3)$. Le radici dell'equazione sono $4i-2$, e $1-2i$, e la soluzione è data da 0, $3i-\frac{3}{2}$

Esercizio 2.

A. $\frac{(2+2\sqrt{3}i)^{10}}{(-4+4\sqrt{3}i)^8}=\frac{2^{20}e^{i\pi\frac{10}{3}}}{2^{24}e^{i\pi\frac{16}{3}}}=\frac{1}{16}$ B. $\frac{(2+2\sqrt{3}i)^{10}}{(-4-4\sqrt{3}i)^8}=\frac{2^{20}e^{i\pi\frac{10}{3}}}{2^{24}e^{i\pi\frac{32}{3}}}=\frac{1}{32}(-1+i\sqrt{3})$

C. $\frac{(2-2\sqrt{3}i)^{10}}{(-4-4\sqrt{3}i)^8}=\frac{2^{20}e^{-i\pi\frac{10}{3}}}{2^{24}e^{i\pi\frac{32}{3}}}=\frac{1}{16}$ D. $\frac{(2+2\sqrt{3}i)^{10}}{(4-4\sqrt{3}i)^8}=\frac{2^{20}e^{i\pi\frac{10}{3}}}{2^{24}e^{-i\pi\frac{8}{3}}}=\frac{1}{16}$

Esercizio 3.

A. $f(z)=x^2-y^2+2x+iv(x,y)\overset{\text{def}}{=}u(x,y)+iv(x,y)$. Prima si verifica $u_{xx}+u_{yy}=0$. Poi bisogna cercare la funzione $v(x,y)$ tale che $u_x=v_y$ e $u_y=-v_x$. $u_x=2x+2=v_y$ e quindi $v(x,y)=2xy+2y+h(x)$. La seconda equazione diventa $-2y=-2y-h'(x)$ da cui $h'(x)=0$ e quindi $h\equiv c$. Dunque la risposta è $v(x,y)=2xy+2y$ (a parte le costanti).

B. $v(x,y)=2xy-2y$, C. $v(x,y)=-2xy+y$, D. $v(x,y)=-4xy+y$

Esercizio 4.

A. Scriviamo la funzione come $\frac{1}{2+i}\frac{1}{z-2}-\frac{1}{2+i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2+i}(\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{i}\frac{1}{1+\frac{z}{i}})=\frac{-1}{2(i+2)}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{z}{2})^k+\frac{-1}{i(2+i)}\sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{z}{i})^k=\sum_{k=0}^{+\infty}c_kz^k$ dove $c_k=\frac{1}{2+i}((-i)^{-k-1}-2^{-k-1})$. La serie converge se $|z|<2$ e $|z|<1$ da cui $|z|<1$ e 1 è il valore della distanza fra $z=0$ e $z=-i$ (la singolarità più vicina). Quindi la serie non converge per $z=1-i$.

La serie per $1<|z|<2$ è $\frac{1}{2+i}\frac{1}{z-2}-\frac{1}{2+i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2+i}(\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{i}{z}})=\frac{-1}{2(i+2)}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{z}{2})^k-\frac{1}{2+i}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{i}{z})^k$ e converge precisamente nell'insieme $1<|z|<2$.

La serie per $|z|>2$ è $\frac{1}{2+i}\frac{1}{z-2}-\frac{1}{2+i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2+i}(\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{i}{z}})=\frac{1}{i+2}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{2}{z})^k-\frac{1}{2+i}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{i}{z})^k$ e converge precisamente nell'insieme $|z|>2$.

B. Scriviamo la funzione come $\frac{1}{i-2}\frac{1}{z+2}+\frac{1}{2-i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{i-2}(\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{i}\frac{1}{1+\frac{z}{i}})=\frac{1}{2(i-2)}\sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{z}{2})^k+\frac{-1}{i(i-2)}\sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{z}{i})^k=\sum_{k=0}^{+\infty}c_kz^k$ dove $c_k=\frac{1}{i-2}((-i)^{-k-1}+(-2)^{-k-1})$. La serie converge se $|z|<2$ e $|z|<1$ da cui $|z|<1$ e 1 è il valore della distanza fra $z=0$ e $z=-i$ (la singolarità più vicina). Quindi la serie non converge per $z=-1-i$.

La serie per $1<|z|<2$ è $\frac{1}{i-2}\frac{1}{z+2}+\frac{1}{2-i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{i-2}(\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{i}{z}})=\frac{1}{2(i-2)}\sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{z}{2})^k-\frac{1}{i-2}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{i}{z})^k$ e converge precisamente nell'insieme $1<|z|<2$.

La serie per $|z|>2$ è $\frac{1}{i-2}\frac{1}{z+2}+\frac{1}{2-i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{i-2}(\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{i}{z}})=\frac{1}{i-2}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{2}{z})^k-\frac{1}{i-2}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{i}{z})^k$ e converge precisamente nell'insieme $|z|>2$.

C. Scriviamo la funzione come $\frac{1}{2-i}\frac{1}{z-2}-\frac{1}{2-i}\frac{1}{z-i}=\frac{1}{2-i}(\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{i}\frac{1}{1-\frac{z}{i}})=\frac{1}{2(i-2)}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{z}{2})^k+\frac{1}{i(2-i)}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{z}{i})^k=\sum_{k=0}^{+\infty}c_kz^k$ dove $c_k=\frac{1}{2-i}(i^{-k-1}-2^{-k-1})$. La serie converge se $|z|<2$ e $|z|<1$ da cui $|z|<1$ e 1 è il valore della distanza fra $z=0$ e $z=i$ (la singolarità più vicina). Quindi la serie non converge per $z=1+i$.

La serie per $1<|z|<2$ è $\frac{1}{2-i}\frac{1}{z-2}-\frac{1}{2-i}\frac{1}{z-i}=\frac{1}{2-i}(\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}})=\frac{1}{2(i-2)}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{z}{2})^k-\frac{1}{2-i}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{i}{z})^k$ e converge precisamente nell'insieme $1<|z|<2$.

La serie per $|z|>2$ è $\frac{1}{2-i}\frac{1}{z-2}-\frac{1}{2-i}\frac{1}{z-i}=\frac{1}{2-i}(\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}})=\frac{1}{2-i}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{2}{z})^k-\frac{1}{2-i}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{i}{z})^k$ e converge precisamente nell'insieme $|z|>2$.

D. Scriviamo la funzione come $\frac{-1}{2+i}\frac{1}{z+2}+\frac{1}{2+i}\frac{1}{z-i}=\frac{-1}{2+i}(\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{i}\frac{1}{1-\frac{z}{i}})=\frac{-1}{2(2+i)}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{-z}{2})^k+\frac{-1}{i(2+i)}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{z}{i})^k=\sum_{k=0}^{+\infty}c_kz^k$ dove $c_k=\frac{1}{2+i}(-i^{-k-1}+(-2)^{-k-1})$. La serie converge se $|z|<2$ e $|z|<1$ da cui $|z|<1$ e 1 è il valore della distanza fra $z=0$ e $z=i$ (la singolarità più vicina). Quindi la serie non converge per $z=-1+i$.

La serie per $1<|z|<2$ è $\frac{-1}{2+i}\frac{1}{z+2}+\frac{1}{2+i}\frac{1}{z-i}=\frac{-1}{2+i}(\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}})=\frac{-1}{2(2+i)}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{-z}{2})^k-\frac{1}{2+i}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{i}{z})^k$ e converge precisamente nell'insieme $1<|z|<2$.

La serie per $|z|>2$ è $\frac{-1}{2+i}\frac{1}{z+2}+\frac{1}{2+i}\frac{1}{z-i}=\frac{-1}{2+i}(\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}})=\frac{-1}{2(2+i)}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{2}{z})^k-\frac{1}{2+i}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{i}{z})^k$ e converge precisamente nell'insieme $|z|>2$.

Esercizio 5. Tutti gli esercizi erano della forma $\int_0^{+\infty}dx\frac{\sqrt{x}}{(a+x)^2}$ con $a=1,2,3,4$. A parte i preliminari si ha $2I = 2\pi i \lim_{z\to -a} \frac{d}{dz}\sqrt{z} = 2\pi i \frac{1}{2}(-a)^{-1/2}$ da cui $I = \frac{\pi}{2} i e^{-i\pi/2}\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$

Esercizio 6. Tutti gli esercizi erano della forma $\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\sin\varphi}{a\pm\cos\varphi}$ con $a=\sqrt{3}$ oppure $a=\sqrt{5}$. Esaminiamo il caso con il segno meno. Con la trasformazione $z = e^{i\varphi}$ l'integrale diventa $\oint (\frac{1}{z} - z)\frac{dz}{z^2-2az+1}$. Il denominatore ha radici $z_{1,2} = a\pm\sqrt{a^2-1}$ ed essendo $a\geq 1$ solo $z_2 = a-\sqrt{a^2-1}$ sta all'interno del cerchio di raggio 1. Si hanno due integrali di cui il primo presenta anche il polo in $z=0$. Con i residui l'integrale è $2\pi i(1+\frac{1}{z_2}\frac{1}{z_2-z_1} - \frac{z_2}{z_2-z_1}) = \frac{2\pi i}{z_2(z_2-z_1)^2}(z_2^2 - z_1z_2 + 1 - z_2^2) = 0$ in quanto $z_1z_2=1$.

Con il segno $+$ si cambia il ruolo di z_1 e z_2. Stavolta è z_1 che sta all'interno del cerchio per cui si riscrive la formula di prima con l'inversione di z_1 e z_2. Il risultato non cambia.

Esercizio 7.

A. Sia $f(z) = \frac{z^4 e^{\frac{2}{z}}}{(z+1)^5}$. L'integrale esteso al quadrato di centro -1, lato 1, e percorso in senso antiorario. $I = 2\pi i Resf(-1)$ oppure $I = -2\pi i(Resf(\infty) + Resf(0))$.

$Resf(0)$. È di fatto pressoché incalcolabile in quanto $f(z) = \frac{z^4 e^{\frac{2}{z}}}{(z+1)^5} = z^4\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{2}{z})^k\frac{1}{k!}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-z)^n\Big)^5$.

Facendo invece $Resf(-1)$ si ottiene $Resf(-1) = \lim_{z\to-1}\frac{1}{24}\frac{d^4}{dz^4}z^4e^{\frac{2}{z}} = \frac{8}{z^4}e^{\frac{2}{z}}(3z^4-6z^3+6z^2-4z+2) = \frac{7}{e^2}$ e quindi l'integrale è $\frac{14\pi i}{e^2}$. L'intenzione non era quella di costringere gli studenti a eseguire quattro derivate. Una svista nella costruzione della funzione ha avuto tale conseguenza

Se l'integrale è esteso al quadrato di centro -1, lato 3 e percorso in senso antiorario si ha $I = 2\pi i(Resf(-1) + Resf(0))$ oppure $-2\pi i Resf(\infty)$. Conviene quest'ultima formula in quanto si ha, nell'intorno del punto all'infinito, $f(z) = \frac{z^4e^{\frac{2}{z}}}{z^5(1+\frac{1}{z})^5} = \frac{1}{z} + O(\frac{1}{z^2})$ da cui $I = 2\pi i$.

B. $f(z) = \frac{z^4e^{\frac{1}{z}}}{(z+\frac{1}{2})^5}$. L'integrale esteso al quadrato di centro $-\frac{1}{2}$, lato $\frac{1}{2}$ e percorso in senso antiorario è pari a $I = 2\pi i Resf(-\frac{1}{2}) = 2\pi i\frac{7}{e^2}$

Se il quadrato ha lato 2 allora il risultato è come prima.

C. $f(z) = \frac{z^4e^{\frac{4}{z}}}{(z+2)^5}$. L'integrale esteso al quadrato di centro -2, lato 2 e percorso in senso antiorario è pari a $I = 2\pi i Resf(-2) = 2\pi i\frac{7}{e^2}$

Se il quadrato ha lato 5 allora il risultato è come prima.

D. $f(z) = \frac{z^4e^{\frac{8}{z}}}{(z+4)^5}$. L'integrale esteso al quadrato di centro -4, lato 4 e percorso in senso antiorario è pari a $I = 2\pi i Resf(-4) = 2\pi i\frac{7}{e^2}$

Se il quadrato ha lato 9 allora il risultato è come prima.

Tra l'altro, se si volesse calcolare il residuo nell'origine, si poterbbero usare le formule precedenti attraverso $2\pi i(Resf(-a) + Resf(0)) = -2\pi i Resf(\infty)$ e quindi $Resf(0) = -Resf(-a) - Resf(\infty)$ con a diverso a seconda dei casi ma il cui residuo rimane invariato.